

Dạng 2: Xác định số hạng và công bội của cấp số nhân

Phương pháp: Dựa vào giả thiết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1 , giải hệ phương trình này tìm được q và u_1 .

- Để xác định số hạng thứ k , ta sử dụng công thức: $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1 + q^4} = \frac{51}{17} = 3.$$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 135 \\ u_1 \cdot q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 135 \quad (*) \\ u_1 q^3(1 + q + q^2) = 40 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q^3(1 + q + q^2)}{u_1(1 + q + q^2)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = \frac{135}{1 + q + q^2} = \frac{1215}{19}.$$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

Bài tập 2: Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

b) Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3.$$

$$\text{c) Ta có: } u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12} \\ \Rightarrow k - 1 = 12 \Leftrightarrow k = 13.$$

Bài tập 3: Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm u_1 và q biết rằng:

$$\text{a) } \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i=1, \dots, 5) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases}$$

$$\text{d) } u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60.$$

$$\text{e) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} u_1 u_2 u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad \text{i)}$$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i=1, \dots, 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = \frac{35}{2} \quad (1) \\ u_1 \cdot u_1 \cdot q^4 = 25 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (u_1 \cdot q^2) = 5^2 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^2 = 5 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{q^2} \text{ thay vào (1) được:}$$

$$\frac{5}{q^2} (q + q^2 + q^3) = \frac{35}{2} \Leftrightarrow 2(1 + q + q^2) = 79 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{4}; \text{ với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 20.$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q^2 + q^4) = 65 \quad (1) \\ u_1 (1 + q^6) = 325 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{1 + q^6}{1 - q^2 + q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow \frac{(1 + q^2)(1 - q^2 + q^4)}{1 - q^2 + q^4} = 5 \left(\text{vì } 1 + q^6 = 1 + (q^2)^3 \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1 - 2^2 + 2^4} = 5; \text{ với } q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1 - (-2)^2 + (-2)^4} = 5.$$

$$c) \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^5 = -42. \\ u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q(1 + q^2 + q^4) = -42 & (1) \\ u_1 \cdot q(1 + q^2) = 20 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1 + q^2 + q^4}{q(1 + q^2)} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10 + 10q^2 + 10q^4 = -21q - 21q^3$$

$$\Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10q^2 + 21q + 10 + \frac{21}{q} + \frac{10}{q^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(q + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Leftrightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \text{ Điều kiện } |t| \geq 2$$

$$(*) \Leftrightarrow 10(t^2 - 2) + 21t + 10 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} (\text{loại}) \\ t = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4} = 64$$

$$\text{Nếu } q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{2^2 + 2^4} = 1.$$

$$d) u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 165 \\ u_1 q^2 + u_1 q^3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^5) = 165 & (1) \\ u_1 q^2(1 + q) = 60 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1 + q^5}{q^2(1 + q)} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1 + q)(1 - q + q^2 - q^3 + q^4)}{q^2(1 + q)} = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - q + q^2 - q^3 + q^4) = 11q^2 \Leftrightarrow 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2} - \frac{4q^3}{q^2} - \frac{7q^2}{q^2} - \frac{4q}{q^2} + \frac{4}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \text{ Điều kiện: } |t| \geq 2.$$

$$(*) \Leftrightarrow 4(t^2 - 2) - 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{3}{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^5} = \frac{165}{1^2+2^5} = 5; \text{ với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^2} = \frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 160.$$

$$\text{e) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2q^2 + u_1^2q^4 + u_1q^6 = 85. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3) = 15 \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2+q^3)^2 = 15^2 & (1) \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85 & (2). \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{[(1+q)+q^2(1+q)]^2}{(1+q^2)+q^4(1+q^2)} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1+q)(1+q^2)]^2}{(1+q^2)+(1+q^4)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+2q+q^2)(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow 17(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4) = 45(1+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{34q^3}{q^2} - \frac{34q^2}{q^2} - \frac{34q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \text{ (vì dễ dàng thấy } q \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 28q^2 - 34q - 34 - \frac{34}{q} + 28 = 0 \Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \text{ Điều kiện: } |t| \geq 2.$$

$$(*) \Leftrightarrow 14(t^2 - 2) - 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 1$; với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{15}{1+q+q^2+q^3} = 8$.

$$f) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 13 & (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2) = 351 & (**) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = \frac{13}{1+q+q^2} = \frac{13}{1+3+9} = 1$.

$$g) \begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189. \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1q - 5\sqrt{5}u_1q^4 = 0 \\ u_1^3 + (u_1q^2)^3 = 189. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1^3(1+q^6) = 189 \Rightarrow u_1^3 = \frac{189}{1+q^6} = 125 \Rightarrow u_1 = 5. \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} u_1u_2u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot u_1 \cdot q \cdot u_1 \cdot q^2 = 1728 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1q)^3 = 12^3 \\ u_1(1+q+q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 12 \\ u_1(1+q+q^2) = 63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ \frac{12}{q}(1+q+q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ 12q^2 - 51q + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \Rightarrow u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{4} \Rightarrow u_1 = 48. \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2) = 3 \\ u_2(1+q^4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q^2)^2 = 9 & (*) \\ u_1^2(1+q^4) = 5 & (**) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{(1+q^2)^2}{1+q^4} = \frac{9}{5}$. Đặt: $t = q^2, t \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 5(1+t)^2 = 9(1+t^2) \Leftrightarrow 4t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \Rightarrow q = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 1$; $q = -\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 1$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 2$; $q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 2$.

$$\begin{aligned} \text{k) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 7 \\ u_1^2 + (u_1q)^2 + (u_1q^2)^2 = 21 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 7 \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2)^2 = 49 \quad (*) \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 21 \quad (**) \end{cases} . \text{ Lấy } \frac{(*)}{(**)} \text{ được:} \end{aligned}$$

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{49}{21} \Leftrightarrow 21(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3) = 49(1+q^2+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 21(1+2q+3q^2+2q^3+q^4) = 49(1+q^2+q^4) \Leftrightarrow 28q^4 - 42q^3 - 14q^2 - 42q + 28 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{42q^3}{q^2} - \frac{14q^2}{q^2} - \frac{42q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 28q^2 - 42q - 14 - \frac{42}{q} + \frac{28}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 28\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 42\left(q + \frac{1}{q}\right) - 14 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \text{ Điều kiện: } |t| \geq 2$$

$$(2) \Leftrightarrow 28(t^2 - 2) - 42t - 14 = 0 \Leftrightarrow 28t^2 - 42t - 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -1(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 1; \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 4$$

Bài tập 4: Tìm a, b biết rằng $1, a, b$ là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

$$\text{Theo đề bài ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 1+b=2a \\ b^2=a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=2a(1) \\ b=\pm a^2 \end{cases}$$

$$\text{Với } b = a^2 \text{ thay vào (1) được } 1+a^2=2a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$$

$$\text{Với } b = -a^2 \text{ thay vào (1) được } 1-a^2=2a \Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2} \vee a=-1-\sqrt{2}$$

$$\square a = -1+\sqrt{2} \Rightarrow b = -(-1+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow b = -3+2\sqrt{2}$$

$$\square a = -1-\sqrt{2} \Rightarrow b = -(-1-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow b = -3-2\sqrt{2}$$

Kết luận: $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}; \begin{cases} a=-1+\sqrt{2} \\ b=-3+2\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} a=-1-\sqrt{2} \\ b=-3-2\sqrt{2} \end{cases}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Bài tập 5: Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1%/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
- Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có: dãy u_n lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai $q = 1\%$

Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1 + 1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là: $u_{10} = 2 \cdot (1 + 1\%)^{10-1} \approx 2,19$ (triệu dân).

Bài tập 6: Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là: $u_1 = 800 - 800 \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%) = 768$ (triệu đồng).

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_2 = 800 \cdot (1 - 4\%) - 800 \cdot (1 - 4\%) \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%)^2 = 737,28 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Gọi u_n là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

Dãy số u_n tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1 - 4\%$.

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800 \cdot (1 - 4\%)^n$.

c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là: $u_{10} = 800 \cdot (1 - 4\%)^{10} \approx 531,87$ (triệu đồng).

Bài tập 6: Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là

$$1 + 0,0075 = 1,0075$$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n = 2,1 \cdot 1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032} = 2,1 \cdot 1,0075^{2032-2022} = 2,26$

b) Khi $u_n = 2.u_{2022} \Leftrightarrow 1,0075^{n-2022} = 2 \Leftrightarrow n = 2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022.

Bài tập 7: Quang Hải là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Giả sử năm 2023, anh vừa kí hợp đồng 5 năm với CLB Công An Hà Nội với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch CLB đưa ra cho Quang Hải ba phương án về lương như sau:



Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.

Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

Lời giải

Ta tính tổng tiền lương của Quang Hải theo từng phương án:

Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng thì sau 5 năm tổng số tiền lương của Quang Hải là:

$$5.300 + 5.50 = 1750 \text{ (triệu đồng)}$$

Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của Quang Hải là:

$$300 + 300 \cdot (1 + 10\%) + 300 \cdot (1 + 10\%)^2 + 300 \cdot (1 + 10\%)^3 + 300(1 + 10\%)^4 = 1831,53 \text{ (triệu đồng)}$$

Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của Quang Hải là:

$$300 + 330 + 360 + 390 + 420 = 1800 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy Quang Hải nên sử dụng phương án 2 để nhận được tổng lương sau 5 năm là cao nhất.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 1$, $u_4 = 64$. Tính công bội q của cấp số nhân đã cho

- A. $q = 4$. B. $q = -4$. C. $q = 21$. D. $q = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_4 = 64 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^3 = 64 \Leftrightarrow q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4.$$

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2$ và $u_5 = -162$. Công bội q bằng:

- A. $q = -3$. B. $q = 3$. C. $q = 3; q = -3$. D. $q = -2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_5 = -162 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^4 = -162 \Leftrightarrow q^4 = \frac{-162}{u_1} = \frac{-162}{-2} = 81 \Leftrightarrow q = \pm 3.$$

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_4 = 54$. Giá trị của công bội q bằng

- A. 3. B. 9. C. 27. D. -3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{u_4}{u_1} = q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{54}{2} = 27 \Rightarrow q = \sqrt[3]{27} = 3$$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân?

- A. 24. B. 54. C. 162. D. 48.

Lời giải

$$\text{Có } u_4 = u_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 3^3 = 54.$$

Câu 5: : Cấp số nhân (u_n) có $u_4 = 9$, $u_5 = 81$ có công bội là

- A. 3. B. 72. C. 18. D. 9.

Lời giải

$$\text{Ta có công bội } q = \frac{u_5}{u_4} = \frac{81}{9} = 9.$$

Câu 6: Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

- A. $q = \frac{1}{2}$. B. $q = -2$. C. $q = 2$. D. $q = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \cdot q^5 \Leftrightarrow q = 2.$$

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

- A. $q = 3$. B. $q = 5$. C. $q = \frac{3}{2}$. D. $q = \frac{2}{3}$.

Lời giải

$$\text{Theo đề ra ta có: } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ 486 = u_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow q^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow q = 3.$$

Câu 8: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_7 = -32$. Tìm q ?

- A. $q = \pm \frac{1}{2}$. B. $q = \pm 2$. C. $q = \pm 4$. D. $q = \pm 1$.

Lời giải

Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân ta có

$$u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_7 = u_1 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases}$$

Câu 9: Biết ba số $x^2; 8; x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Giá trị của x bằng

- A. $x = 4$ B. $x = 5$ C. $x = 2$ D. $x = 1$

Lời giải

Do ba số $x^2; 8; x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên theo tính chất cấp số nhân ta được

$$x^2 \cdot x = 8 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$ B. $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.
C. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. D. $u_k = u_1 + (k-1)q$.

Lời giải

Theo tính chất các số hạng của cấp số nhân.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{-1}{10} \cdot u_n \end{cases}$. Chọn hệ thức đúng:

- A. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = -\frac{1}{10}$. B. $u_n = (-2) \frac{1}{10^{n-1}}$.
C. $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ ($n \geq 2$). D. $u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}$ ($n \geq 2$).

Lời giải

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{10}$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = -\frac{1}{10}$.

Câu 12: Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Tính u_5 ?

- A. $u_5 = \frac{-27}{16}$. B. $u_5 = \frac{-16}{27}$. C. $u_5 = \frac{16}{27}$. D. $u_5 = \frac{27}{16}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_5 = u_1 \cdot q^4 = (-3) \left(\frac{2}{3} \right)^4 = -\frac{16}{27}.$$

Câu 13: Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số này?

- A. Thứ 5. B. Thứ 6.

C. Thứ 7.

D. Không phải là số hạng của cấp số.

Lời giải

Giả sử số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ n của cấp số này.

$$\text{Ta có: } u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow (-3) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ 6 của cấp số.

Câu 14: Cho cấp số nhân có $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_5 = 16$. Tìm q và u_1 .

A. $q = \frac{1}{2}$; $u_1 = \frac{1}{2}$.

B. $q = -\frac{1}{2}$; $u_1 = -\frac{1}{2}$.

C. $q = 4$; $u_1 = \frac{1}{16}$.

D. $q = -4$; $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow \frac{1}{4} = u_1 \cdot q; u_5 = u_1 \cdot q^4 \Leftrightarrow 16 = u_1 \cdot q^4$$

$$\text{Suy ra: } q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4 \text{ từ đó: } u_1 = \frac{1}{16}.$$

Câu 15: Với x là số nguyên dương, ba số $2x$, $3x+3$, $5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là

A. $-\frac{250}{3}$.

B. $\frac{250}{3}$.

C. 250.

D. -250.

Lời giải

Ba số $2x$, $3x+3$, $5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên

$$2x(5x+5) = (3x+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 9.$$

$$\text{Với } x = 9, \text{ suy ra } q = \frac{3 \cdot 9 + 3}{2 \cdot 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là: } (5 \cdot 9 + 5) \cdot \frac{5}{3} = \frac{250}{3}.$$

Câu 16: Cho ba số thực x, y, z trong đó $x \neq 0$. Biết rằng $x, 2y, 3z$ lập thành cấp số cộng và x, y, z lập thành cấp số nhân; tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $\begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$

C. $q = 2$

D. $q = 1$

Lời giải

x, y, z lập thành cấp số nhân công bội q nên $y = qx; z = q^2x$

$x, 2y, 3z$ lập thành cấp số cộng nên $2y = \frac{x+3z}{2} \Rightarrow 2qx = \frac{x+3q^2x}{2}$

$$\text{Vì } x \neq 0 \text{ nên } 2qx = \frac{x+3q^2x}{2} \Rightarrow 4q = 1+3q^2 \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ q=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 17: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội dương và $u_2 = \frac{1}{4}, u_4 = 4$. Giá trị của u_1 là

A. $u_1 = \frac{1}{6}$. **B.** $u_1 = \frac{1}{16}$. **C.** $u_1 = -\frac{1}{16}$. **D.** $u_1 = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo tính chất của cấp số nhân với $k \geq 2$ thì $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ ta suy ra:

$$u_3^2 = u_2 \cdot u_4 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 1 \\ u_3 = -1 \end{cases}$$

Vì (u_n) là cấp số nhân có công bội dương nên $u_3 = 1$. Gọi q là công bội ta được $q = \frac{u_4}{u_3} = \frac{4}{1} = 4$.

$$\text{Từ đó ta có } u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}.$$

Câu 18: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

A. $2 \cdot 3^{2018}$. **B.** $3 \cdot 2^{2018}$. **C.** $2 \cdot 3^{2019}$. **D.** $3 \cdot 2^{2019}$.

Lời giải

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{2018}$.

Câu 19: Cho cấp số nhân $(u_n); u_1 = 1, q = 2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 1 \cdot 2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10} \Leftrightarrow n-1 = 10 \Leftrightarrow n = 11.$$

Câu 20: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ sáu của (u_n) là

A. $u_6 = 320$. **B.** $u_6 = -160$. **C.** $u_6 = -320$. **D.** $u_6 = 160$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_6 = u_1 \cdot q^5 = 5 \cdot (-2)^5 = -160.$$

Câu 21: Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1 + u_2 + u_3 = 168$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 21$

A. $u_1 = 24$. **B.** $u_1 = \frac{1334}{11}$. **C.** $u_1 = 96$. **D.** $u_1 = \frac{217}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 168 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 168 \\ u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^4 + u_1 \cdot q^5 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 168 \\ u_1 q^3(1 + q + q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{168}{1 + q + q^2} \\ q^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 96 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} . \text{ Vậy } u_1 = 96 ,$$

Câu 22: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 2018 của dãy số trên

A. $u_{2018} = 6.2^{2017} - 5$. **B.** $u_{2018} = 6.2^{2018} - 5$. **C.** $u_{2018} = 6.2^{2017} + 1$. **D.** $u_{2018} = 6.2^{2018} + 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = v_n - 5, u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow v_{n+1} - 5 = 2(v_n - 5) + 5 \Leftrightarrow v_{n+1} = 2v_n.$$

$$\text{Do đó } v_n \text{ là cấp số nhân với } v_1 = 6, q = 2, v_n = 6 \cdot 2^{n-1}, v_{2018} = 6 \cdot 2^{2017} \Rightarrow u_{2018} = 6 \cdot 2^{2017} - 5.$$

Câu 23: Cho (u_n) là cấp số nhân, công bội $q > 0$. Biết $u_1 = 1, u_3 = 4$. Tìm u_4 .

A. $\frac{11}{2}$. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1 \cdot q^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_4 = u_1 \cdot q^3 = 8.$$

Câu 24: Cho cấp số nhân $(u_n), n \geq 1$ với công bội $q = 2$ và có số hạng thứ hai $u_2 = 5$. Số hạng thứ 7 của cấp số nhân là

A. $u_7 = 320$. **B.** $u_7 = 640$. **C.** $u_7 = 160$. **D.** $u_7 = 80$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (u_n), n \geq 1 \text{ là cấp số nhân có công bội } q = 2 \text{ nên có số hạng tổng quát } u_n = q^{n-1} \cdot u_1.$$

$$\text{Vì } u_2 = 5 = u_1 \cdot 2 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow u_7 = \frac{5}{2} \cdot 2^6 = 160. \text{ Vậy số hạng thứ 7 của cấp số là 160.}$$

Câu 25: Cho một cấp số nhân có số hạng thứ 4 gấp 4096 lần số hạng đầu tiên. Tổng hai số hạng đầu tiên là 34. Số hạng thứ 3 của dãy số có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 512. **C.** 1024. **D.** 32.

Lời giải

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} u_4 = 4096 \cdot u_1 \\ u_1 + u_2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 4096 \\ u_1 \cdot (1 + q) = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 16 \\ 17 \cdot u_1 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 16 \\ u_1 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 16^2 = 512.$$

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 12$, $\frac{u_3}{u_8} = 243$. Tìm u_9 .

- A. $u_9 = \frac{2}{2187}$. B. $u_9 = \frac{4}{6563}$. C. $u_9 = 78732$. D. $u_9 = \frac{4}{2187}$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Ta có } u_3 = u_1 q^2, u_8 = u_1 q^7 \Rightarrow \frac{u_3}{u_8} = \frac{1}{q^5} = 243 \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } u_9 = u_1 q^8 = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{4}{2187}.$$

Câu 27: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$ với $n = 1, 2, \dots$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó?

- A. $u_1 = 5, q = 4$. B. $u_1 = 5, q = 6$. C. $u_1 = 4, q = 5$. D. $u_1 = 6, q = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4 \\ u_1 + u_2 = S_2 = 5^2 - 1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = 24 - u_1 = 20 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 4, q = \frac{u_2}{u_1} = 5.$$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

- A. $u_1 = 9; q = 2$. B. $u_1 = 9; q = -2$. C. $u_1 = -9; q = -2$. D. $u_1 = -9; q = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(q^2 - 1) = 54 \\ u_1 q^2(q^2 - 1) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } u_1 = 9; q = 2.$$

Câu 29: Xen giữa số 3 và số 768 là 7 số để được một cấp số nhân có $u_1 = 3$. Khi đó u_5 là:

- A. 72. B. -48. C. ± 48 . D. 48.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_1 = 3 \text{ và } u_9 = 768 \text{ nên } 768 = 3 \cdot q^8 \Rightarrow q^8 = 256 \Rightarrow q = \pm 2.$$

$$\text{Do đó } u_5 = u_1 \cdot q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48.$$

Câu 30: Cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Tìm u_1 , biết rằng $u_1 \leq 100$.

- A. $u_1 = 16$. B. $u_1 = 2$. C. $u_1 = -16$. D. $u_1 = -2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 + u_1 \cdot q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{16} (q^3 - 8) = 0(1) \\ u_1 (1 + q^4) = 272(2) \end{cases}.$$

$$\text{Từ (2) suy ra } u_1 \neq 0 \text{ do đó: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q = 2 \end{cases}.$$

Nếu $q = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow u_1 = 272$ không thỏa điều kiện $u_1 \leq 100$.

Nếu $q = 2$ thì $(2) \Leftrightarrow u_1 = 16$ thỏa điều kiện $u_1 \leq 100$.

Câu 31: Cho cấp số nhân $u_1 = -1$, $u_6 = 0,00001$. Khi đó q và số hạng tổng quát là?

A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$.

B. $q = \frac{-1}{10}, u_n = -10^{n-1}$.

C. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

D. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_6 = u_1 \cdot q^5 = 0,00001 \Leftrightarrow q^5 = \frac{-1}{10^5} \Leftrightarrow q = \frac{-1}{10} \Rightarrow u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = -1 \cdot \left(\frac{-1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}.$$

Câu 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 2020 của dãy.

A. $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} - 5$. **B.** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} + 5$. **C.** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} - 5$. **D.** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} + 5$.

Lời giải

$$\text{Đặt } u_n = v_n - 5 \Rightarrow v_{n+1} - 5 = 2(v_n - 5) + 5 \Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$$

$$\text{Có } u_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 6 \Rightarrow u_n + 5 = 6 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow u_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 5$$

$$\text{Vậy } u_{2020} = 6 \cdot 2^{2019} - 5 = 3 \cdot 2^{2020} - 5$$

Câu 33: Số hạng đầu và công bội q của cấp số nhân với $u_7 = -5, u_{10} = 135$ là:

A. $u_1 = \frac{5}{729}, q = -3$. **B.** $u_1 = -\frac{5}{729}, q = 3$. **C.** $u_1 = \frac{5}{729}, q = 3$. **D.** $u_1 = -\frac{5}{729}, q = -3$.

Lời giải

$$\text{Vì } (u_n) \text{ là CSN nên: } u_7 = u_1 \cdot q^6 = -5, u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 135$$

$$\text{Suy ra: } \frac{u_{10}}{u_7} = \frac{135}{-5} \Leftrightarrow \frac{u_1 q^9}{u_1 q^6} = -27 \Rightarrow q = -3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_7}{q^6} = -\frac{5}{729}.$$

Câu 34: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2; u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Tìm số hạng thứ 2019 của dãy số.

A. $u_{2019} = 5 \cdot 2^{2019} - 6062$.

B. $u_{2019} = 5 \cdot 2^{2019} + 6062$.

C. $u_{2019} = 5 \cdot 2^{2020} - 6062$.

D. $u_{2019} = 5 \cdot 2^{2020} + 6062$.

Lời giải

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \Leftrightarrow u_n + 3n + 5 = 2[u_{n-1} + 3(n-1) + 5]$, với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$.

Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$.

Như vậy, (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và $v_1 = 10$, do đó $v_n = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$.

Do đó $u_n + 3n + 5 = 5 \cdot 2^n$, hay $u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5$ với $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$.

Nên $u_{2019} = 5 \cdot 2^{2019} - 6062$.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2} \right), n \geq 1$. Giá trị của u_{50} gần nhất với số nào dưới đây?

A. -312540600 . B. -312540500 . C. -212540500 . D. -212540600 .

Lời giải

Ta có

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} \right) \quad (1)$$

Đặt $v_n = u_n - \frac{3}{n+1}, n \geq 1$, ta có $v_1 = u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ và từ (1) thu được $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$.

Suy ra dãy số (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{3}{2}$, ta có $v_n = v_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Từ đó ta được $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{50} \approx -212540500$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$

b) Cấp số nhân có công bội $q = -\frac{3}{2}$

c) Số hạng $u_5 = \frac{27}{2}$

d) $-\frac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $u_2 = u_1 q = 4, u_4 = u_1 q^3 = 9 \Rightarrow \frac{u_4}{u_2} = \frac{u_1 q^3}{u_1 q} \Rightarrow \frac{9}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{3}{2} (q < 0)$.

Thay $q = -\frac{3}{2}$ vào u_2 , ta được: $u_1 \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \Rightarrow u_1 = -\frac{8}{3}$.

b) Đúng: Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$ và công bội $q = -\frac{3}{2}$.

Khi đó $u_n = -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

c) Sai: Vậy $u_5 = -\frac{27}{2}$

d) Sai: $-\frac{2187}{32} \neq -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^7$ nên không phải là số hạng thứ 8

Câu 2: Trong một hồ sen, số lá sen ngày hôm sau bằng 3 lần số lá sen ngày hôm trước. Biết rằng ngày đầu có 1 lá sen thì tới ngày thứ 10 hồ sẽ đầy lá sen. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu ngày đầu có 9 lá sen thì tới ngày thứ 8 hồ sẽ đầy lá sen.

b) Số lá sen lập thành cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và công bội $q = 3$.

c) Số lá sen lập thành cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.

d) Nếu ngày đầu có 9 lá sen thì tới ngày thứ 9 hồ sẽ đầy lá sen.

Lời giải

Ngày đầu có $u_1 = 1$ lá sen.

Do số lá sen ngày hôm sau bằng 3 lần số lá sen ngày hôm trước nên ta có cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và công bội $q = 3$.

Vì ngày thứ 10 hồ sẽ đầy lá sen nên có $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 1 \cdot 3^9 = 3^9$ lá sen.

Ngày đầu có $v_1 = 9$ lá sen.

Do số lá sen ngày hôm sau bằng 3 lần số lá sen ngày hôm trước nên ta có cấp số nhân (v_m) với $v_1 = 9$ và công bội $q = 3$.

Khi đó sau m ngày thì số lá sen là $v_m = v_1 \cdot q^{m-1} = 9 \cdot 3^{m-1}$.

Ta có $9 \cdot 3^{m-1} = 3^9 \Leftrightarrow 3^{m+1} = 3^9 \Leftrightarrow m+1 = 9 \Leftrightarrow m = 8$.

a) Đúng: Nếu ngày đầu có 9 lá sen thì tới ngày thứ 8 hồ sẽ đầy lá sen.

b) Đúng: Số lá sen lập thành cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và công bội $q = 3$.

c) Sai: Số lá sen lập thành cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và công bội $q = 3$.

d) Sai: Nếu ngày đầu có 9 lá sen thì tới ngày thứ 8 hồ sẽ đầy lá sen.

Câu 3: Để tích lũy cho việc học đại học của cậu con trai đầu lòng, cô Lan quyết định hằng tháng bỏ ra 600 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi cậu con trai tròn ba tuổi và gửi tiền vào đầu mỗi tháng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đến lần gửi khoản tiền thứ 180 thì cậu con trai tròn 18 tuổi.

b) Đến lần gửi khoản tiền thứ 180 thì cậu con trai tròn 18 tuổi.

- c) Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 5 (làm tròn đến hàng nghìn) là 3.030.000 đồng.
- d) Số tiền của cô Lan có trong chương trình vào thời điểm cậu con trai đầu lòng tròn 18 tuổi nhỏ hơn 160 triệu đồng.

Lời giải

a) Đúng: Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Lan có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0,6$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ nhất là: $u_1 = a$.

b) Sai: Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 2 là:

$$u_2 = a(1+r) + a = 0,6(1+0,5\%) + 0,6.$$

Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 3 là: $u_3 = a(1+r)^2 + a(1+r) + a$.

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ n là:

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

c) Đúng: Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 5 là:

$$u_5 = a \cdot \frac{(1+r)^5 - 1}{r} = 0,6 \cdot \frac{(1+0,5\%)^5 - 1}{0,5\%} \approx 3,03 \text{ triệu đồng} = 3.030.000 \text{ đồng}.$$

d) Sai: Vào thời điểm cậu con trai đầu lòng tròn 18 tuổi là thời điểm gửi khoản tiền thứ 180.

$$\text{Lúc đó cô sẽ tích lũy được } u_{180} = a \cdot \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 0,6 \cdot \frac{(1+0,5\%)^{180} - 1}{0,5\%} \approx 174,49 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 4: Vào năm con gái được 4 tuổi, một người chuẩn bị gửi tiết kiệm đầu mỗi năm một số tiền x (triệu đồng) ($x \in \mathbb{R}$) để đến năm 18 tuổi sẽ có được 200 triệu cho con gái đi học đại học. Hiện tại lãi suất tiền gửi hàng năm là $4,8\%$ /năm. Giả sử lãi suất này được giữ ổn định. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $q = (1 + 4,8\%)$.

b) Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $u_1 = x$.

c) $x = 10$ (triệu đồng)

d) Đến năm con gái được 10 tuổi, người này dự định khi con gái được 18 tuổi sẽ mua thêm cho con gái một chiếc xe máy trị giá 50 triệu đồng. Do đó, kể từ thời điểm đầu năm con gái được 10 tuổi người này cần gửi tiết kiệm y triệu đồng đến khi con gái 18 tuổi ($y \in \mathbb{R}$). Giá trị nhỏ nhất của $y = 15$.

Lời giải

Số tiền người đó nhận được sau năm thứ nhất là: $A_1 = x(1 + 4,8\%)$.

Số tiền người đó nhận được sau năm thứ hai là: $A_2 = x(1 + 4,8\%) + x(1 + 4,8\%)^2$.

Số tiền người đó nhận được sau năm thứ 14 là:

$$A_{14} = x(1 + 4,8\%) + x(1 + 4,8\%)^2 + \dots + x(1 + 4,8\%)^{14}.$$

Khi đó: A_{14} có $\begin{cases} u_1 = x(1 + 4,8\%) \\ q = (1 + 4,8\%) \end{cases}$ nên $A_{14} = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = x(1 + 4,8\%) \frac{(1 + 4,8\%)^{14} - 1}{4,8\%}$.

Suy ra: $x = \frac{200.4,8\%}{(1 + 4,8\%) \left[(1 + 4,8\%)^{14} - 1 \right]} \approx 9,873336 \approx 10$ (triệu đồng).

Khi $x = 10$ (triệu đồng).

Gọi $z = y - x$ là số tiền mà người đó phải gửi thêm mỗi năm kể từ năm con gái 10 tuổi (năm thứ 6) và $P_8 = z(1 + 4,8\%) + z(1 + 4,8\%)^2 + \dots + z(1 + 4,8\%)^8$ là số tiền nhận được sau 8 năm.

Khi đó để nhận được số tiền 250 triệu đồng vào năm con gái 18 tuổi (8 năm kể từ con gái 10 tuổi) thì:

$$P_8 = 250 - 10(1 + 4,8\%) \frac{(1 + 4,8\%)^8 - 1}{4,8\%} \approx 47,43 \text{ (triệu đồng)}.$$

Suy ra $z = \frac{47,43.4,8\%}{(1 + 4,8\%) \left[(1 + 4,8\%)^8 - 1 \right]} \approx 4,77 \approx 5$ (triệu đồng).

Vậy $y = 15$ (triệu đồng).

a) Đúng: Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $q = (1 + 4,8\%)$.

b) Sai: Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $u_1 = x(1 + 4,8\%)$.

c) Đúng: $x = 10$ (triệu đồng)

d) Đúng: Đến năm con gái được 10 tuổi, người này dự định khi con gái được 18 tuổi sẽ mua thêm cho con gái một chiếc xe máy trị giá 50 triệu đồng. Do đó, kể từ thời điểm đầu năm con gái được 10 tuổi người này cần gửi tiết kiệm y triệu đồng đến khi con gái 18 tuổi ($y \in \mathbb{R}$). Giá trị nhỏ nhất của $y = 15$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

Lời giải

$$192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 64 = (-1)^6 \cdot 2^6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

Lời giải

$$\frac{1}{10^{103}} = u_n = u_1 q^{n-1} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ chẵn} \\ n-1 = 103 \end{cases} \Leftrightarrow n = 104.$$

Câu 3: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

Lời giải

$32805 = u_n = u_1 q^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9$. Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 4: Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1 \frac{1-q^6}{1-q} = u_1 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1 q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96.$$

Câu 5: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

Lời giải

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_4}, \frac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\frac{1}{q}$.

$$\text{Do đó từ giả thiết ta có } \begin{cases} u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 49 \left(\frac{1}{u_1} \cdot \frac{\frac{1}{q^5} - 1}{\frac{1}{q} - 1} \right) & (1) \\ u_1 + u_1 q^2 = 35 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = \frac{49}{u_1} \left(\frac{q^5 - 1}{q^4 (q - 1)} \right) \Leftrightarrow u_1^2 q^4 = 49 \Leftrightarrow u_1 q^2 = \pm 7.$$

Với $u_1 q^2 = -7$. Thay vào (2), ta được $u_1 - 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 42$. Suy ra $q^2 = -\frac{7}{42}$: vô lý.

$$\text{Với } u_1 q^2 = 7. \text{ Thay vào (2), ta được } u_1 + 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 28. \text{ Vậy } \begin{cases} u_1 = 28 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 28 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $u_1 + 4q^2 = 29$.

Câu 6: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 26 \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2)^2 = 26^2 & (1) \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 364 & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) chia (2), ta được :

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{26^2}{364} \Leftrightarrow 3q^4 - 7q^3 - 4q^2 - 7q + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 7\left(q + \frac{1}{q}\right) - 4 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = q + \frac{1}{q}, |t| \geq 2. \text{ Phương trình trở thành } 3t^2 - 7t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{10}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{10}{3}, \text{ suy ra } q + \frac{1}{q} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \text{ hoặc } q = \frac{1}{3}. \text{ Vì } q > 1 \text{ nên } q = 3.$$

Câu 7: Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1, y+2, x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} (x+6y) + (8x+y) = 2(5x+2y) \\ (x-1)(x-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y-1)(3y-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x^2 + y^2 = 40.$$

Câu 8: Cho dãy số tăng a, b, c ($c \in \mathbb{N}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a, b+8, c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a, b+8, c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2(b+8) \\ a(c+64) = (b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 & (1) \\ a - 2b = 16 - c & (2) \\ ac + 64a = (b+8)^2 & (3) \end{cases}.$$

$$\text{Thay (1) vào (3) ta được: } b^2 + 64a = b^2 + 16b + 64 \Leftrightarrow 4a - b = 4 \quad (4).$$

$$\text{Kết hợp (2) với (4) ta được: } \begin{cases} a - 2b = 16 - c \\ 4a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{c-8}{7} \\ b = \frac{4c-60}{7} \end{cases} \quad (5)$$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c = (4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2 - 424c + 3600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 36 \\ c = \frac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow c = 36 \text{ (} c \in \mathbb{Q} \text{)}.$$

$$\text{Với } c = 36 \Rightarrow a = 4, b = 12 \Rightarrow P = 4 - 12 + 72 = 64.$$

Câu 9: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

Lời giải

Giả sử ba số hạng $a; b; c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b; a; c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q . Ta có

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a = bq; c = bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq + bq^2 = 2b \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ q^2 + q - 2 = 0 \end{cases}.$$

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ nên $a; b; c$ là cấp số cộng công sai $d = 0$ (vô lí).

Nếu $q^2 + q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 1$ hoặc $q = -2$. Nếu $q = 1 \Rightarrow a = b = c$ (vô lí), do đó $q = -2$.

Câu 10: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

Lời giải

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q .

Ta

có :

$$\begin{cases} A + B + C + D = 360 \\ D = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1 + q + q^2 + q^3) = 360 \\ Aq^3 = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ A = 9 \\ D = Aq^3 = 243 \end{cases} \Rightarrow A + D = 252.$$

Câu 11: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\,m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và

$$u_1 = \frac{12\,288}{2} = 6\,144.$$

Khi đó diện tích mặt trên cùng là: $u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6\,144}{2^{10}} = 6$

-----HẾT-----